

Michael Zocher

Hochfrequenztechnik I

Schaltungstechnik mit konzentrierten Elementen

Informationstechnik

Michael Zocher

Hochfrequenztechnik I

Schaltungstechnik mit konzentrierten Elementen

2. Auflage

 VOGT

Dresden 2013

Autor

Prof. Dr.-Ing. Michael Zocher
Hochschule Zittau/Görlitz
Fakultät Elektrotechnik und Informatik
02763 Zittau

Herausgeber

Prof. Dr.-Ing. Jörg Vogt
HTW Dresden
Fakultät Mathematik und Informatik
01069 Dresden

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen
Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.ddb.de> abrufbar.

2., überarb. Aufl. 2013

© Jörg Vogt Verlag 2013
Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Gesetzt vom Autor

ISBN 978-3-938860-64-9

Jörg Vogt Verlag
Niederwaldstr. 36
01277 Dresden
Germany

Phone: +49-(0)351-31403921
Telefax: +49-(0)351-31403918
e-mail: info@vogtverlag.de
Internet : www.vogtverlag.de

Vorwort

Grundlage für das vorliegende Buch ist das Vorlesungsskript der Lehrveranstaltung „Hochfrequenztechnik“, die der Autor an der Hochschule Zittau/Görlitz hält. Die Lehrveranstaltung ist Bestandteil der Ausbildung in der Studienrichtung „Nachrichten- und Kommunikationstechnik“ an der Fakultät Elektrotechnik und Informatik. Der Inhalt dieses Buches wendet sich demzufolge hauptsächlich an Studenten, die sich in ihrem Studium mit den Besonderheiten der elektronischen Schaltungstechnik unter Verwendung konzentrierter Bauelemente bei hohen Frequenzen beschäftigen. Für auf diesem Gebiet tätige Ingenieure kann dieses Buch sicher auch als Nachschlagewerk dienen. Für die Erarbeitung des Inhalts werden Kenntnisse der Elektrotechnik und Elektronik vorausgesetzt, wie sie im Grundstudium eines Ingenieurstudiengangs der Elektrotechnik vermittelt werden.

Eine vielfach verwendete Methode zur Synthese und Analyse komplexer elektronischer Schaltungen ist die Vierpoltheorie. Mit ihr können z.B. komplette Übertragungssysteme in einzelne Funktionsblöcke zerlegt werden, deren Eigenschaften durch Gleichungssysteme, die die Klemmenströme und Klemmenspannungen miteinander verbinden, beschrieben werden. Mit Hilfe von speziellen Algorithmen lassen sich diese Funktionsblöcke anschließend zu umfangreichen Schaltungen kombinieren, deren Eigenschaften danach ebenfalls durch entsprechende Gleichungssysteme der Klemmengrößen dargestellt werden. Im Kapitel 1 (Vierpole und Mehrpole) werden die Grundlagen dieser Zusammenhänge behandelt.

Leitungen spielen als Verbindungselemente bei hohen Frequenzen eine besondere Rolle. Ihre Fähigkeit, Energie in Form von elektrischen und magnetischen Feldern zu speichern, führt bei ausreichend hohen Frequenzen zu Wellenausbreitungseffekten, die beim praktischen Einsatz berücksichtigt werden müssen. Die Darstellung und Berechnung dieser Eigenschaften ist Inhalt von Kapitel 2 (Leitungen).

Im Kapitel 3 (Smith-Diagramm) wird das wohl wichtigste Werkzeug zur Visualisierung von Anpassverhältnissen an Leitungen und anderen Baugruppen der Hochfrequenztechnik behandelt. Das Smith-Diagramm wird vielfältig zum Entwurf wie auch zur messtechnischen Verifizierung von Schaltungen verwendet. Dieses Kapitel erläutert die mathematischen Zusammenhänge bei der Entwicklung dieser Darstellungsform und deren technische Anwendung.

Die Anwendung der im Kapitel 1 beschriebenen Algorithmen setzt die messtechnische Bestimmung von Strömen und Spannungen und deren Abhängigkeiten an realen Bauelementen voraus. Diese Vorgehensweise ist bei hohen Frequenzen schwierig bzw. überhaupt nicht mehr anwendbar aus verschiedenen Gründen. Zum einen sind Strommessungen kaum noch möglich, zum anderen existieren Baugrup-

pen und Wellenleiter (Hohlleiter, Lichtwellenleiter), bei denen die Definition von Strom und Spannung an ihren Anschlüssen sinnlos geworden ist. Deshalb wird im Kapitel 4 (S-Parameter) eine Parameterform zur Beschreibung der Eigenschaften von Baugruppen auf der Grundlage von Leistungsgrößen und Wellenausbreitungseffekten auf Leitungen dargestellt. Für das Verständnis dieser Zusammenhänge sind die Grundlagen aus Kapitel 2 notwendig.

Die Verwendung realer aktiver Bauelemente (z.B. Transistoren) im Hochfrequenzbereich weist ebenfalls Unterschiede im Vergleich zur Verwendung bei niedrigen Frequenzen auf. Durch den zunehmenden Einfluss von sog. parasitären Bauelementen im Ersatzschaltbild dieser Zweitore, die aus der geometrischen Ausdehnung und den nichtidealen Eigenschaften der verwendeten Materialien resultieren, entstehen interne Rückwirkungen, die unter Betriebsbedingungen zu instabilem Verhalten führen können. Kapitel 5 (Stabilität aktiver Zweitore) erläutert die mathematischen Zusammenhänge und die Verfahren zur praktischen Realisierung stabiler Verstärker. Kapitel 5 setzt die Grundlagen aus Kapitel 4 voraus.

Gegenstand von Kapitel 6 (Passive Netzwerke mit konzentrierten Elementen) sind Filter und Anpassnetzwerke. Filter sind Baugruppen zur Realisierung eines Übertragungsfrequenzbereiches entsprechend den Vorgaben (Übertragung des Nutzsignals, Unterdrückung unerwünschter Signale). Anpassnetzwerke dienen der Herstellung der Leistungsanpassung zwischen den i.a. unterschiedlichen komplexen Quell- und Lastwiderständen an den Schnittstellen von Schaltungsteilen. Zu Beginn werden die Eigenschaften realer konzentrierter Bauelemente (Spule, Kondensator) bezüglich der Grenzen des Einsatzes bei hohen Frequenzen untersucht. Darauf aufbauend erfolgt die Erläuterung verschiedener, praktisch anwendbarer Verfahren zum Entwurf von Filtern und Anpassnetzwerken.

Das Verständnis der dargestellten Zusammenhänge wird durch zahlreiche Illustrationen erleichtert. Durch ergänzende Aufgabenstellungen und deren Lösung wird der praktische Bezug zur Theorie hergestellt.

Mein besonderer Dank gilt an dieser Stelle Herrn Prof. Dr.-Ing. Jörg Vogt für den Anstoß zum Zustandekommen dieses Buches und für die Unterstützung bei der Anfertigung des Manuskripts. Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei Herrn Dipl.-Ing. (FH) Egmont Schreiter für die kritische Durchsicht dieses Buches.

Zittau, im Juni 2011

Michael Zocher

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
1. Vierpole und Mehrpole	1
1.1 Vierpol-Parameter	1
1.2 Elementarvierpole.....	11
1.3 Betriebskenngrößen.....	13
2. Leitungen.....	23
2.1 Leitungskonstanten.....	25
2.2 Leitungsgleichungen.....	26
2.3 Lösungen für impulsförmige Vorgänge.....	30
2.3.1 Leitung lastseitig angepasst.....	31
2.3.2 Leitung mit beliebigen Abschlüssen.....	33
2.4 Lösung für rein sinusförmige Vorgänge.....	38
2.4.1 Strom- und Spannungsverteilung auf einer Leitung.....	39
2.4.2 Eingangswiderstand, Reflexionsfaktor, Welligkeit und Anpassungs- faktor	48
2.4.3 Beispielaufgabe	51
3. Smith-Diagramm	55
3.1 Abbildung der komplexen Widerstandsebene in die komplexe Reflexionsfaktorebene	55
3.2 Abbildung der komplexen Leitwertebene in die komplexe Reflexionsfaktorebene	59
3.3 m-Kreise (SWR-Kreise), $1/\lambda$ -Geraden	61
3.4 Inversion im Smith-Diagramm.....	66
3.5 Leitungen im Smith-Diagramm.....	68
3.5.1 Beispiel für eine Leitungsberechnung	69
3.6 Entwurf von Anpassnetzwerken	71
3.6.1 Beispiel für ein Anpassnetzwerk	74
4. S-Parameter	79
4.1 Einführung.....	79
4.2 Die S-Matrix.....	83
4.3 Wellen-Ketten-Parameter, T-Parameter	84
4.4 Umrechnung in Vierpolparameter	84
4.5 Quelle und Last.....	85
4.6 Signalflussgraphen	88
4.6.1 Berechnung der Reflexionsfaktoren an den Toren eines Zweitores in Abhängigkeit vom Abschluss des anderen Tores	91

4.6.2	Berechnung der Leistungsübertragung über ein Zweitor.....	92
5.	Stabilität aktiver Zweitore	97
5.1	Ursachen von Instabilitäten	97
5.2	Kenngrößen zur Beschreibung von Instabilitäten.....	98
5.3	Stabiler Verstärkerbetrieb durch Wahl der Abschlüsse	104
5.3.1	Beispiel für den Entwurf eines Verstärkers	106
5.4	Stabilisierung durch Beschaltung mit Widerständen.....	108
5.4.1	Beispiel für die Stabilisierung eines Transistors.....	110
5.5	Neutralisation	112
5.6	Kaskode-Schaltung.....	116
6.	Passive Netzwerke mit konzentrierten Elementen.....	119
6.1	Eigenschaften konzentrierter Blindelemente bei hohen Frequenzen ..	119
6.1.1	Induktivitäten.....	119
6.1.2	Kapazitäten	121
6.1.3	Verlustfaktor, Güte und Dämpfung von Blindelementen	124
6.2	Resonanzkreise	126
6.3	Resonanzkreise als Bandpass-Filter	136
6.3.1	Parallel-Resonanzkreis als Bandpass-Filter.....	136
6.3.2	Serien-Resonanzkreis als Bandpass-Filter.....	141
6.4	Parallel-Resonanzkreis als Bandsperren-Filter	142
6.5	Zweikreisiges Koppelfilter als Bandpass.....	145
6.5.1	Butterworth-Filter.....	149
6.5.2	Unterkritische Kopplung	149
6.5.3	Chebyshev-Filter	150
6.5.4	Verschiedene Betriebsgüten	150
6.6	Mehrkreisige Filter	153
6.6.1	Leistungsbilanz eines verlustlosen Reaktanzfilters	153
6.6.2	Allgemeine Anforderungen an den Betriebsübertragungsfaktor	154
6.6.3	Vierpolsynthese	155
6.6.4	Synthese von m-kreisigen Bandpässen.....	162
6.6.5	Beispiel für den Entwurf eines Koppelfilters.....	167
6.7	Anpassnetzwerke	172
6.7.1	Netzwerke mit zwei Blindelementen.....	172
6.7.2	Transformatoren	176
6.7.3	Kapazitive Ankopplung.....	183
6.7.4	Allgemeines Π -Glied.....	184
6.7.5	Allgemeines T-Glied	189
	Abkürzungen	192
	Literaturverzeichnis.....	193
	Index	194

1. Vierpole und Mehrpole

1.1 Vierpol-Parameter

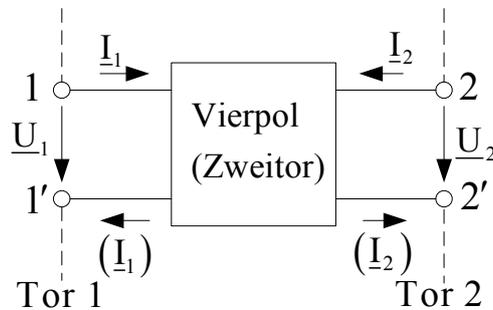


Bild 1: Vierpol

Ein Vierpol ist eine sogenannte Blackbox, er enthält im Inneren beliebige Anordnungen von elektronischen Bauelementen, die die Klemmenpaare miteinander verbinden. Vierpole dienen der Modellierung von elektronischen Schaltungen, meist im Zusammenhang mit Übertragungssystemen.

Im Bild 1 ist die grundlegende Darstellung eines Vierpols zu sehen. Jeweils zwei Pole werden zu einem Klemmenpaar (Tor) zusammengefasst. Bild 1 zeigt ebenfalls die übliche Definition der Klemmenströme und -spannungen, wobei die in Klammern gesetzten Ströme weggelassen werden. Es soll hier lediglich verdeutlicht werden, dass in den Anschlüssen 1 und 1' sowie 2 und 2' der gleiche Strom fließt.

Passive Vierpole

Passive Vierpole enthalten ausschließlich passive Bauelemente, also R, L und C. Ein übertragenes Signal kann demzufolge nur gedämpft in Erscheinung treten. Mit passiven Vierpolen lassen sich z.B. Filter und Dämpfungsglieder modellieren.

Aktive Vierpole

Aktive Vierpole sind Verstärker. Sie enthalten zusätzlich zu passiven Bauelementen sogenannte gesteuerte Quellen. Mit aktiven Vierpolen wird beispielsweise das Verhalten von Transistoren modelliert.

1. Vierpole und Mehrtere

Gesteuerte Quellen

1. Gesteuerte Spannungsquellen

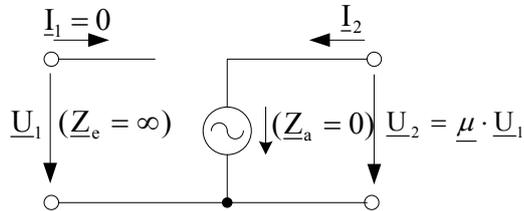


Bild 2: VCVS

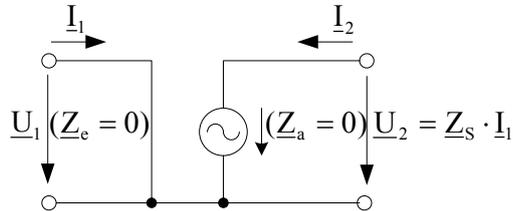


Bild 3: CCVS

Im Bild 2 ist die spannungsgesteuerte Spannungsquelle VCVS (engl. voltage controlled voltage source) dargestellt. Sie besitzt einen unendlich großen Eingangswiderstand sowie einen Kurzschluss als Ausgangswiderstand. Der Proportionalitätsfaktor $\underline{\mu}$ wird als Spannungsverstärkung bezeichnet. Bild 3 zeigt die stromgesteuerte Spannungsquelle CCVS (engl. current controlled voltage source). Ein- und Ausgangswiderstände sind Kurzschlüsse, \underline{Z}_s ist der Steuerwiderstand.

2. Gesteuerte Stromquellen

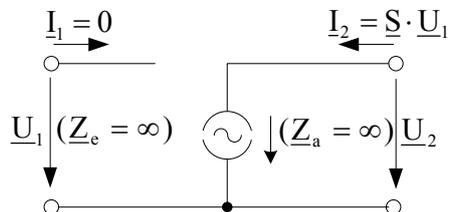


Bild 4: VCCS

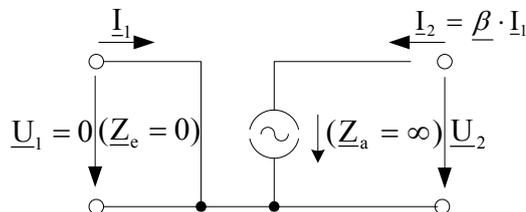


Bild 5: CCCS

In Bild 4 und Bild 5 sind die entsprechenden gesteuerten Stromquellen zu sehen. VCCS (engl. voltage controlled current source) ist die international gebräuchliche Abkürzung für eine spannungsgesteuerte Stromquelle. Der Proportionalitätsfaktor \underline{S} wird als Steilheit bezeichnet. Diese Stromquelle wird zur Modellierung von Feldeffekt-Transistoren und Röhren verwendet, da die Eigenschaften dieser Verstärkerelemente dieser Quelle sehr ähnlich sind. CCCS (engl. current controlled current source) steht für die stromgesteuerte Stromquelle. Der Faktor $\underline{\beta}$ heißt Stromverstärkung. Mit dieser Quelle kann sehr gut das Verhalten von Bipolar-Transistoren modelliert werden.

Vierpolgleichungen

Unter Vierpolgleichungen versteht man Gleichungssysteme, welche die Abhängigkeiten der Klemmenströme und -spannungen am Vierpol (Zweitor) bzw. an einem 2n-Pol (Mehrtor) darstellen. Wenn die Koeffizienten dieser Gleichungssysteme (Vierpol-Parameter) bekannt sind, ist das Verhalten des Vierpols vollständig beschrieben und man muss die innere Schaltung nicht kennen. In Abhängigkeit vom Charakter der zu beschreibenden Vierpole und vom Anwendungsfall unterscheidet man verschiedene Arten von Vierpolgleichungen. Mit der Anwendung dieser Gleichungen ist jedoch eine Einschränkung verbunden: Üblicherweise wird hier ausschließlich das lineare Verhalten der 2n-Pole bzw. Mehrpole beschrieben. Das bedeutet, diese Koeffizienten sind **nicht aussteuerungsabhängig**. Damit ist verbunden, dass die Beträge von Strom und Spannung bestimmte Werte nicht überschreiten dürfen (Kleinsignalbetrieb), so dass die Annahme der konstanten Koeffizienten gerechtfertigt ist.

1. Z-parameter (Widerstands-Parameter)

Das Gleichungssystem hat hier folgende Form:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2 \quad (1)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2 \quad (2)$$

Die Koeffizienten dieses Gleichungssystems haben die Einheit eines Widerstandes (Ω) und heißen demzufolge Z- oder Widerstands-Parameter. Diese Parameterform ist nicht auf Vierpole (Zweitore) beschränkt. Man kann damit auch 2n-Pole bzw. Mehrpole beschreiben:

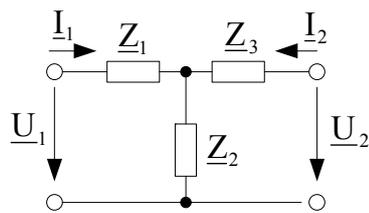
$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2 + \underline{Z}_{13} \underline{I}_3 + \dots + \underline{Z}_{1n} \underline{I}_n \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2 + \underline{Z}_{23} \underline{I}_3 + \dots + \underline{Z}_{2n} \underline{I}_n \\ &\quad \vdots \\ \underline{U}_n &= \underline{Z}_{n1} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{n2} \underline{I}_2 + \underline{Z}_{n3} \underline{I}_3 + \dots + \underline{Z}_{nn} \underline{I}_n \end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \vdots \\ \underline{U}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \dots & \underline{Z}_{1n} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \dots & \underline{Z}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{Z}_{n1} & \underline{Z}_{n2} & \dots & \underline{Z}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \vdots \\ \underline{I}_n \end{pmatrix} \quad \text{kurz } (\underline{U}) = (\underline{Z}) \cdot (\underline{I})$$

Mit den Z-Parametern lassen sich besonders einfach Vierpole beschreiben, deren Innenschaltung in T- bzw. in Stern-Form vorliegt (Bild 6):

1. Vierpole und Mehrpole



Es gilt:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_2$$

Bild 6: Vierpol in T-Schaltung

Diese Parameterform ist ebenfalls notwendig zur Berechnung eines Ersatzvierpols bei Reihenschaltung von Vierpolen an den Klemmenpaaren (Beispiel Bild 7):

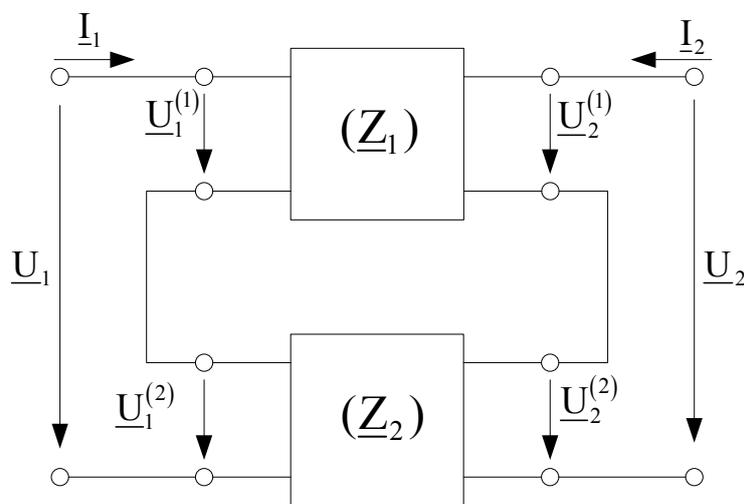


Bild 7: Reihenschaltung von Vierpolen

Es ergibt sich die Z-Matrix des Ersatzvierpols durch Addition der Z-Matrizen der einzelnen Vierpole:

$$(\underline{Z}) = (\underline{Z}_1) + (\underline{Z}_2) \quad (3)$$

2. Y-Parameter (Leitwert-Parameter)

Grundlage ist folgendes Gleichungssystem:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \underline{U}_2 \quad (4)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2 \quad (5)$$

Die Koeffizienten dieses Gleichungssystems haben die Einheit eines Leitwertes (Siemens) und heißen demzufolge Y- oder Leitwert-Parameter. Diese Parameterform ist ebenfalls nicht auf Vierpole (Zweipole) beschränkt:

1. Vierpole und Mehrpole

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \underline{U}_2 + \underline{Y}_{13} \underline{U}_3 + \dots + \underline{Y}_{1n} \underline{U}_n \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2 + \underline{Y}_{23} \underline{U}_3 + \dots + \underline{Y}_{2n} \underline{U}_n \\ &\vdots \\ \underline{I}_n &= \underline{Y}_{n1} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{n2} \underline{U}_2 + \underline{Y}_{n3} \underline{U}_3 + \dots + \underline{Y}_{nn} \underline{U}_n \end{aligned}$$

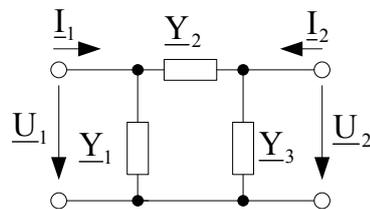
oder

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \vdots \\ \underline{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \dots & \underline{Y}_{1n} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \dots & \underline{Y}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{Y}_{n1} & \underline{Y}_{n2} & \dots & \underline{Y}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \vdots \\ \underline{U}_n \end{pmatrix} \quad \text{kurz } (\underline{I}) = (\underline{Y}) \cdot (\underline{U})$$

Z- und Y-Parameter lassen sich über die Matrix-Inversion ineinander umrechnen:

$$(\underline{Y}) = (\underline{Z})^{-1} \quad \text{bzw.} \quad (\underline{Z}) = (\underline{Y})^{-1} \quad (6)$$

Mit den Y-Parametern lassen sich besonders einfach Vierpole beschreiben, deren Innenschaltung in Π - bzw. in Dreieck-Form vorliegt (Bild 8):



Es gilt:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 \\ \underline{Y}_{22} &= \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 \\ \underline{Y}_{12} &= \underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_2 \end{aligned}$$

Bild 8: Vierpol in Π -Schaltung

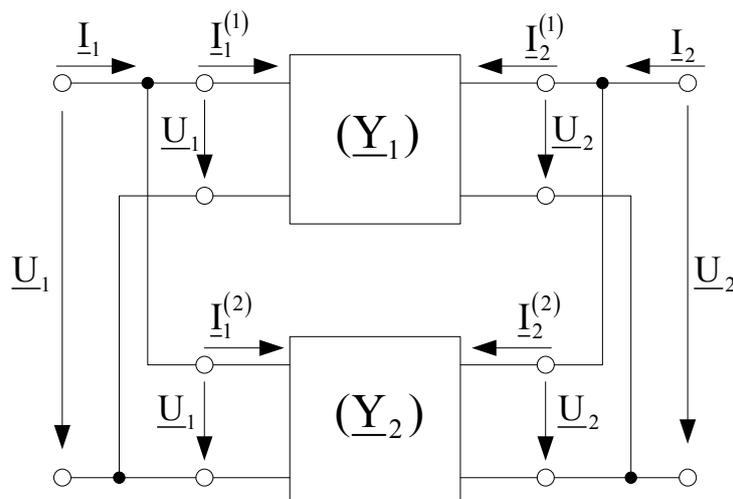


Bild 9: Parallelschaltung von Vierpolen

1. Vierpole und Mehrtere

Diese Parameterform ist notwendig zur Berechnung eines Ersatzvierpols bei Parallelschaltung von Vierpolen an den Klemmenpaaren (Beispiel Bild 9). Es ergibt sich die Y-Matrix des Ersatzvierpols durch Addition der Y-Matrizen der einzelnen Vierpole:

$$(\underline{Y}) = (\underline{Y}_1) + (\underline{Y}_2) \quad (7)$$

3. A-Parameter (Ketten-Parameter, ABCD-Parameter)

Diese Parameterform findet Anwendung bei der Berechnung von Kettenschaltungen von Vierpolen, z.B. innerhalb eines Übertragungssystems. Das zugehörige Gleichungssystem, Gleichungen (8) und (9), stellt die Abhängigkeit der Größen des Klemmenpaares 1 von denen des Klemmenpaares 2 dar. Die A-Parameter sind demzufolge ausschließlich für Vierpole (Zweitore) angebar:

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} (-\underline{I}_2) \quad (8)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} (-\underline{I}_2) \quad (9)$$

Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

Das negative Vorzeichen vor \underline{I}_2 bedeutet, dass die Stromrichtung gegenüber der Standard-Definition umgekehrt werden muss, damit die Ströme an der Schnittstelle zwischen den Vierpolen gleiche Richtungen aufweisen (Bild 10). Jeder Koeffizient dieses Gleichungssystems hat eine andere Bedeutung und deshalb eine andere Maßeinheit:

\underline{A}_{11} -Spannungsverhältnis, \underline{A}_{12} -Widerstand, \underline{A}_{21} -Leitwert, \underline{A}_{22} -Stromverhältnis

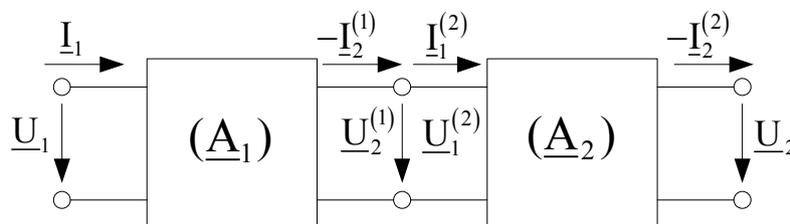


Bild 10: Beispiel für die Kettenschaltung von zwei Vierpolen mit A-Parametern

Die Kettenmatrix des Ersatzvierpols für eine Kettenschaltung von n Vierpolen ergibt sich dann durch die Multiplikation der Kettenmatrizen der Einzelvierpole in der gleichen Reihenfolge wie die Anordnung in der Kettenschaltung:

$$(\underline{A}) = (\underline{A}_1) \cdot (\underline{A}_2) \cdot (\underline{A}_3) \cdot \dots \cdot (\underline{A}_n) \quad (10)$$

4. B-Parameter („Inverse“ Kettenparameter)

Diese Parameter funktionieren umgekehrt zu den A-Parametern, das zugehörige Gleichungssystem stellt hier die Abhängigkeit der Größen des Klemmenpaares 2 von denen des Klemmenpaares 1 dar. Die Berechnung der Kettenschaltung beginnt demzufolge nicht mit dem ersten Vierpol der Kettenschaltung, sondern mit dem letzten (Nr.1 in Bild 11). Die Bezeichnung „Invers“ wurde in Anführungszeichen gesetzt, da die A- und B- Parameter **nicht** durch eine Matrix-Inversion ineinander umgerechnet werden können: $(\underline{A}) \neq (\underline{B})^{-1}$

$$\underline{U}_2 = \underline{B}_{11} \underline{U}_1 + \underline{B}_{12} (-\underline{I}_1) \quad (11)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{B}_{21} \underline{U}_1 + \underline{B}_{22} (-\underline{I}_1) \quad (12)$$

Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{I}_1 \end{pmatrix}$$

Es gilt zur Berechnung der Kettenschaltung:

$$(\underline{B}) = (\underline{B}_1) \cdot (\underline{B}_2) \cdot (\underline{B}_3) \cdot \dots \cdot (\underline{B}_n) \quad (13)$$

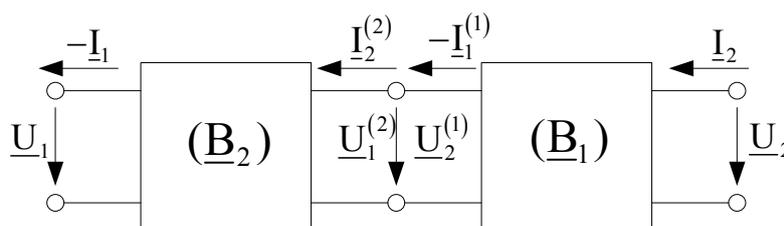


Bild 11: Kettenschaltung von zwei Vierpolen mit B-Parametern

5. H-Parameter (Hybrid-Parameter, Reihen-Parallel-Parameter)

Das Gleichungssystem ist in den Gleichungen (14) und (15) dargestellt.

$$\underline{U}_1 = \underline{H}_{11} \underline{I}_1 + \underline{H}_{12} \underline{U}_2 \quad (14)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{H}_{21} \underline{I}_1 + \underline{H}_{22} \underline{U}_2 \quad (15)$$

1. Vierpole und Mehrpole

Auch hier haben alle Koeffizienten unterschiedliche Bedeutung, deswegen auch die Bezeichnung „Hybrid-Parameter“:

\underline{H}_{11} : Kurzschluss-Eingangswiderstand (gemessen bei Kurzschluss am Klemmenpaar 2)

\underline{H}_{12} : Leerlauf-Spannungsrückwirkung (gemessen bei Leerlauf am Klemmenpaar 1)

\underline{H}_{21} : Kurzschluss-Stromverstärkung (gemessen bei Kurzschluss am Klemmenpaar 2)

\underline{H}_{22} : Leerlauf-Ausgangsleitwert (gemessen bei Leerlauf am Klemmenpaar 1)

Diese Parameter sind besonders geeignet für die Modellierung des Verhaltens von Bipolar-Transistoren bei relativ niedrigen Betriebsfrequenzen. Außerdem werden sie benötigt zur Berechnung der Zusammenschaltung von Vierpolen, wobei die Klemmenpaare 1 in Reihe und die Klemmenpaare 2 parallel geschaltet werden (Reihen-Parallel-Parameter), z.B. bei speziellen Rückkopplungsschaltungen (Bild 12). Sie sind nur auf Vierpole anwendbar.

Man berechnet die H-Matrix des Ersatzvierpols durch Addition der H-Matrizen der einzelnen Vierpole:

$$(\underline{H}) = (\underline{H}_1) + (\underline{H}_2) \quad (16)$$

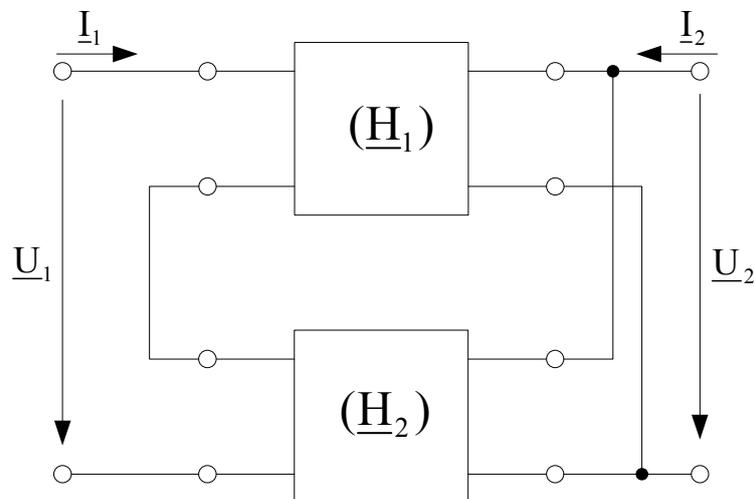


Bild 12: Reihen-Parallel-Schaltung zweier Vierpole

6. P-Parameter (Inverse Hybrid-Parameter, Parallel-Reihen-Parameter)

Diese Parameterform stellt die Umkehrung der H-Parameter da. Es gilt:

$$\underline{I}_1 = \underline{P}_{11} \underline{U}_1 + \underline{P}_{12} \underline{I}_2 \quad (17)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{P}_{21} \underline{U}_1 + \underline{P}_{22} \underline{I}_2 \quad (18)$$

$$(\underline{P}) = (\underline{H})^{-1} \text{ bzw. } (\underline{H}) = (\underline{P})^{-1} \quad (19)$$

Sie können zur Berechnung einer Zusammenschaltung von Vierpolen in umgekehrter Form zu den H-Parametern (Parallel-Reihen-Schaltung) verwendet werden, siehe Bild 13:

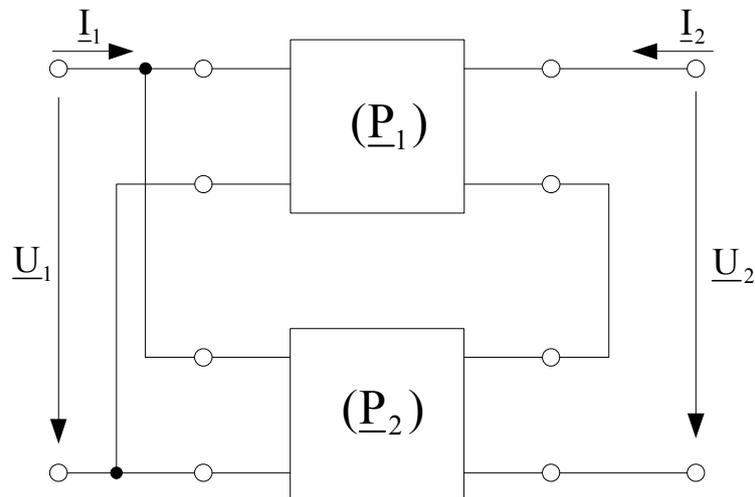


Bild 13: Parallel-Reihen-Schaltung zweier Vierpole

Man berechnet die P-Matrix des Ersatzvierpols durch Addition der P-Matrizen der einzelnen Vierpole:

$$(\underline{P}) = (\underline{P}_1) + (\underline{P}_2) \quad (20)$$

Eine Übersicht über die Umrechnungsbeziehungen aller Vierpolparameter ist in Tabelle 1 dargestellt.

1. Vierpole und Mehrtere

	Y	Z	H	P	A	B
Y	Y	Z^{-1}	$\frac{1}{H_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -H_{12} \\ H_{21} & \Delta H \end{pmatrix}$	$\frac{1}{P_{22}} \begin{pmatrix} \Delta P & P_{12} \\ -P_{21} & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{A_{12}} \begin{pmatrix} A_{22} & -\Delta A \\ -1 & A_{11} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{B_{12}} \begin{pmatrix} B_{11} & -1 \\ -\Delta B & B_{22} \end{pmatrix}$
Z	Y^{-1}	Z	$\frac{1}{H_{22}} \begin{pmatrix} \Delta H & H_{12} \\ -H_{21} & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{P_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -P_{12} \\ P_{21} & \Delta P \end{pmatrix}$	$\frac{1}{A_{21}} \begin{pmatrix} A_{11} & \Delta A \\ 1 & A_{22} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{B_{21}} \begin{pmatrix} B_{22} & 1 \\ \Delta B & B_{11} \end{pmatrix}$
H	$\frac{1}{Y_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -Y_{12} \\ Y_{21} & \Delta Y \end{pmatrix}$	$\frac{1}{Z_{22}} \begin{pmatrix} \Delta Z & Z_{12} \\ -Z_{21} & 1 \end{pmatrix}$	H	P^{-1}	$\frac{1}{A_{22}} \begin{pmatrix} A_{12} & \Delta A \\ -1 & A_{21} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{B_{11}} \begin{pmatrix} B_{12} & 1 \\ -\Delta B & B_{21} \end{pmatrix}$
P	$\frac{1}{Y_{22}} \begin{pmatrix} \Delta Y & Y_{12} \\ -Y_{21} & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{Z_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -Z_{12} \\ Z_{21} & \Delta Z \end{pmatrix}$	H^{-1}	P	$\frac{1}{A_{11}} \begin{pmatrix} A_{21} & -\Delta A \\ 1 & A_{12} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{B_{22}} \begin{pmatrix} B_{21} & -1 \\ \Delta B & B_{12} \end{pmatrix}$
A	$\frac{1}{Y_{21}} \begin{pmatrix} -Y_{22} & -1 \\ -\Delta Y & -Y_{11} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{Z_{21}} \begin{pmatrix} Z_{11} & \Delta Z \\ 1 & Z_{22} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{H_{21}} \begin{pmatrix} -\Delta H & -H_{11} \\ -H_{22} & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{P_{21}} \begin{pmatrix} 1 & P_{22} \\ P_{11} & \Delta P \end{pmatrix}$	A	$\frac{1}{\Delta B} \begin{pmatrix} B_{22} & B_{12} \\ B_{21} & B_{11} \end{pmatrix}$
B	$\frac{1}{Y_{12}} \begin{pmatrix} -Y_{11} & -1 \\ -\Delta Y & -Y_{22} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{Z_{12}} \begin{pmatrix} Z_{22} & \Delta Z \\ 1 & Z_{11} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{H_{12}} \begin{pmatrix} 1 & H_{11} \\ H_{22} & \Delta H \end{pmatrix}$	$\frac{1}{P_{12}} \begin{pmatrix} -\Delta P & -P_{22} \\ -P_{11} & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$	B

Tabelle 1: Vierpolrechnungsbeziehungen ($\Delta X = X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21}$)

1.2 Elementarvierpole

Zur Berechnung von umfangreichen Schaltungen kann man so vorgehen, dass man diese in sehr einfache Vierpole (Elementarvierpole) zerlegt, von denen die Parameter bekannt sind. Anschließend werden die Vierpolparameter der Gesamtschaltung mit den unter Abschnitt 1.1 aufgezeigten Algorithmen (Parallelschaltung, Reihen- und Kettenschaltung) berechnet. Es handelt sich um folgende Elementarvierpole:

Längswiderstand (-leitwert)

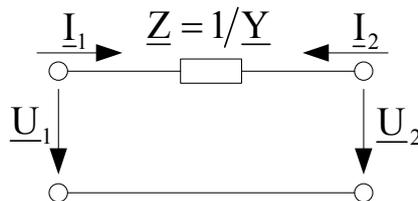


Bild 14: Längswiderstand

Aus Bild 14: $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z}(-\underline{I}_2)$

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_2$$

Damit ergibt sich:

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (21) \quad (\underline{Y}) = \begin{pmatrix} \underline{Y} & -\underline{Y} \\ -\underline{Y} & \underline{Y} \end{pmatrix} \quad (22) \quad (\underline{Z}) = (\infty) \quad (23)$$

Querleitwert (-widerstand)

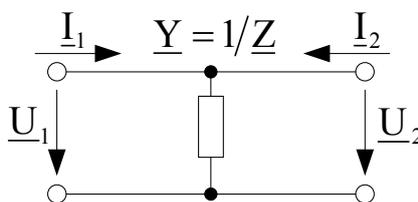


Bild 15: Querleitwert

Aus Bild 15: $\underline{U}_1 = \underline{U}_2$

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}\underline{U}_2 + (-\underline{I}_2)$$

1. Vierpole und Mehrtere

Daraus folgt:

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y} & 1 \end{pmatrix} \quad (24) \quad (\underline{Z}) = \begin{pmatrix} \underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Z} & \underline{Z} \end{pmatrix} \quad (25) \quad (\underline{Y}) = (\infty) \quad (26)$$

Idealer Übertrager

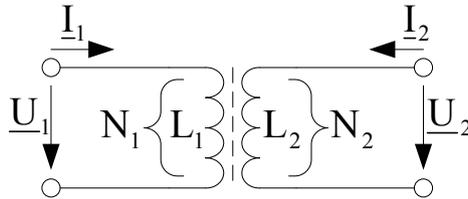


Bild 16: Idealer Übertrager

Der ideale Übertrager besitzt im Gegensatz zum realen Verhalten keine Verluste, keine Streuung und keine Frequenzabhängigkeit. Die Induktivitäten L_1 und L_2 seien so groß, dass ihre Blindwiderstände gegenüber den äußeren Belastungen als vernachlässigbar angenommen werden können:

$$\frac{R_1}{\omega L_1} \rightarrow 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{R_2}{\omega L_2} \rightarrow 0$$

Es gilt:
$$\ddot{u} = \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (27)$$

und
$$\underline{U}_1 = \ddot{u} \underline{U}_2$$

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\ddot{u}} (-\underline{I}_2)$$

Daraus folgt für Bild 16:

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ddot{u}} \end{pmatrix} \quad (28) \quad (\underline{Z}) = (\infty) \quad (29) \quad (\underline{Y}) = (\infty) \quad (30)$$

Gyrator

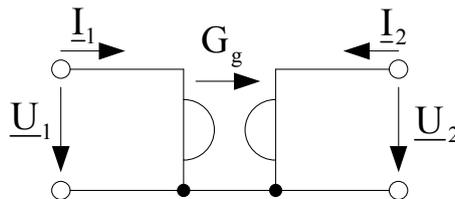


Bild 17: Idealer Gyrator

Der Gyrator kann als Ersatzvierpol für bestimmte Vierpole verwendet werden, die die Eigenschaft eines sog. Dualinverters aufweisen. Das bedeutet, die Beschaltung an einem Klemmenpaar erscheint am anderen Klemmenpaar als duale Variante. Der Leitwert G_g in Bild 17 wird als Gyratorleitwert bezeichnet.

Es gelten folgende Zusammenhänge: $\underline{I}_1 = G_g \underline{U}_2$

$$\underline{I}_2 = -G_g \underline{U}_1$$

$$(\underline{Y}) = \begin{pmatrix} 0 & G_g \\ -G_g & 0 \end{pmatrix} \quad (31) \quad (\underline{Z}) = \begin{pmatrix} 0 & -R_g \\ R_g & 0 \end{pmatrix} \quad (32) \quad (\underline{A}) = \begin{pmatrix} 0 & R_g \\ G_g & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

mit $R_g = \frac{1}{G_g}$

Beispiel: Ein Gyrator wird am Klemmenpaar 2 mit einem Kondensator C beschaltet. Welcher Eingangsleitwert \underline{Y}_{e1} entsteht am Klemmenpaar 1 (Bild 18)?

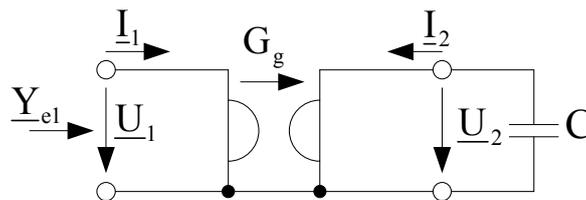


Bild 18

$$\underline{I}_1 = G_g \underline{U}_2 \quad \underline{U}_1 = \frac{-\underline{I}_2}{G_g} \rightarrow \underline{Y}_{e1} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} = G_g^2 \frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_2} \rightarrow \underline{Y}_{e1} = \frac{G_g^2}{j\omega C}$$

oder:
$$\underline{Y}_{e1} = \frac{1}{j\omega \frac{C}{G_g^2}} = \frac{1}{j\omega L}$$

Das Klemmenpaar 1 wirkt demzufolge wie eine Induktivität mit $L = \frac{C}{G_g^2}$.

1.3 Betriebskenngrößen

Betriebskenngrößen sind notwendig, um das Verhalten eines Vierpols (Zweitores) bezüglich seines Übertragungsverhaltens und seiner Anpassungsverhältnisse an

1. Vierpole und Mehrpole

den Toren zu charakterisieren. Die Anpassungsverhältnisse werden durch die Eingangswiderstände (Eingangsleitwerte) der Tore gekennzeichnet.

Eingangsleitwert (-widerstand) am Tor 1

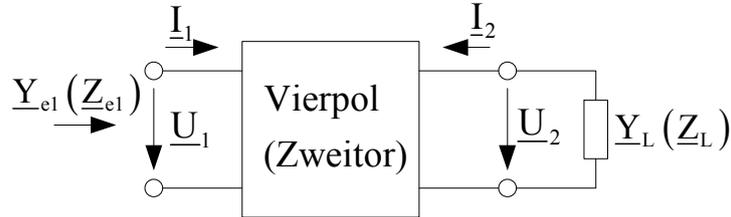


Bild 19

Ein Zweitor (siehe Bild 19) sei am Tor 2 mit einem komplexen Lastleitwert \underline{Y}_L abgeschlossen. Man ersetzt in Gleichung (5) \underline{I}_2 mit $\underline{I}_2 = -\underline{U}_2 \underline{Y}_L$, stellt diese Gleichung nach \underline{U}_2 um und ersetzt damit \underline{U}_2 in Gleichung (4). Nach Auflösung dieser Gleichung erhält man den Eingangsleitwert des Tores 1:

$$\underline{Y}_{e1} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} = \underline{Y}_{11} - \frac{\underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_L} \quad (34)$$

Ein ähnliches Verfahren führt mit Gleichung (1), (2) und einem komplexen Lastwiderstand \underline{Z}_L zum Eingangswiderstand des Tores 1:

$$\underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_L} \quad (35)$$

Eingangsleitwert (-widerstand) am Tor 2

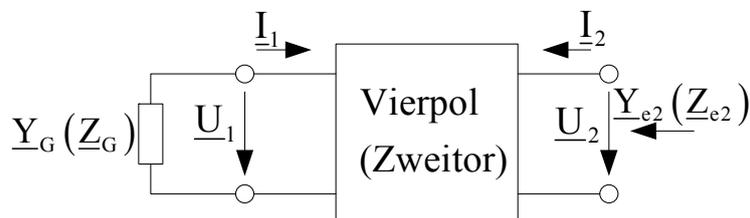


Bild 20

Nun wird das Tor 1 mit einem Generatorleitwert \underline{Y}_G oder Generatorwiderstand \underline{Z}_G abgeschlossen (Bild 20). In umgekehrter Verfahrensweise erhält man mit den Gleichungen (1), (2), (4) und (5) den Eingangsleitwert (-widerstand) des Tores 2:

$$\underline{Y}_{e2} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} = \underline{Y}_{22} - \frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_G} \quad (36)$$

$$\underline{Z}_{e2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_{22} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_G} \quad (37)$$

Selbstverständlich lassen sich diese Größen unter Zuhilfenahme der entsprechenden Gleichungssysteme auch durch andere Vierpolparameter berechnen, z.B. gilt mit H-Parametern:

$$\underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{H}_{11} - \frac{\underline{H}_{12}\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22} + \underline{Y}_L} \quad (38)$$

$$\underline{Y}_{e2} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} = \underline{H}_{22} - \frac{\underline{H}_{12}\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11} + \underline{Z}_G} \quad (39)$$

Das Übertragungsverhalten von Vierpolen kann hinsichtlich der Stromübertragung, Spannungsübertragung und Leistungsübertragung charakterisiert werden. Die Berechnungen werden hier ausschließlich mit Y-Parametern durchgeführt, da diese Parameterform häufig Anwendung in der Hochfrequenztechnik findet.

Für die Strom- und Spannungsübertragung wird der Vierpol mit einer Last versehen (Bild 21).

Spannungsübertragungsfaktor

$$(5) \quad \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} = \underline{Y}_{21} \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} + \underline{Y}_{22} \rightarrow \text{Ersatz von } \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \text{ durch } -\underline{Y}_L \rightarrow -\underline{Y}_L = \underline{Y}_{21} \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} + \underline{Y}_{22}$$

Umstellen ergibt den Spannungsübertragungsfaktor:

$$\underline{H}_U = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{-\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_L + \underline{Y}_{22}} \quad (40)$$

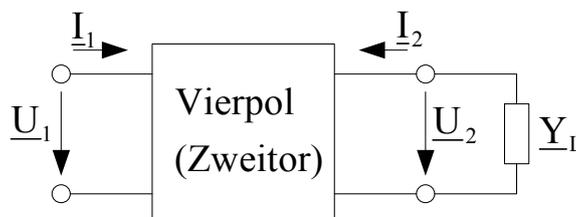


Bild 21

1. Vierpole und Mehrtere

Stromübertragungsfaktor

Zur Berechnung wird der Lastleitwert in die Gleichungen (4) und (5) eingesetzt:

$$\underline{U}_2 = -\frac{\underline{I}_2}{\underline{Y}_L} \quad \rightarrow \text{in (5): } \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 - \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_L}\underline{I}_2 \rightarrow \underline{U}_1 = \frac{1 + \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_L}}{\underline{Y}_{21}}\underline{I}_2$$

$$\rightarrow \text{in (4): } \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 - \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_L}\underline{I}_2$$

Mit Gleichung (5) wird \underline{U}_1 in (4) ersetzt und nach dem Stromverhältnis umgestellt, es resultiert der Stromübertragungsfaktor:

$$\underline{H}_I = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{Y}_L \underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11} (\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_L) - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21}} \quad (41)$$

Betriebsübertragungsfaktor

Strom- und Spannungsübertragungsfaktoren haben aus verschiedenen Gründen eine untergeordnete Bedeutung zur Beurteilung des Übertragungsverhaltens von Vierpolen bei hohen Frequenzen, z.B. lassen sich Ströme nur schwer oder überhaupt nicht mehr messen. Weiterhin müssen die Eigenschaften von Leitungen als Verbindungselemente innerhalb eines Übertragungssystems beachtet werden (siehe Kapitel 2. Leitungen). Deshalb steht das Leistungsübertragungsverhalten im Vordergrund. Zur Berechnung wird der Vierpol jetzt komplett mit Generator- und Lastabschluss versehen, wobei diese i. A. aus einer Blind- und einer Wirkkomponente bestehen können (siehe Bild 22). Ausgangspunkte sind die komplexe Leistung des Generators $\underline{P}_{G_{\max}}$ und die in der Last auftretende komplexe Leistung \underline{P}_L .

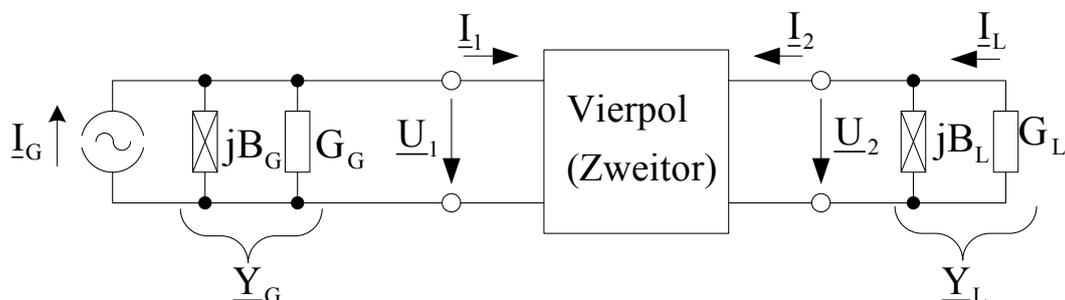


Bild 22: Vierpol mit Abschlüssen

Der komplexe Betriebsübertragungsfaktor \underline{H}_B ist damit folgendermaßen definiert:

$$\underline{H}_B = \frac{1}{\underline{D}_B} = \sqrt{\frac{\underline{P}_L}{\underline{P}_{G \max}}} \quad (42)$$

$\underline{D}_B \rightarrow$ komplexer Betriebsdämpfungsfaktor

Zur Berechnung von $\underline{P}_{G \max}$ wird der Generator mit seinem konjugiert komplexen Generatorleitwert abgeschlossen. Damit kompensiert sich die Blindleistung und die Wirkleistung wird maximal (Bild 23).

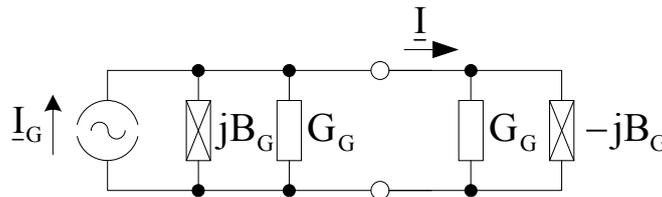


Bild 23

Es ergibt sich unter diesen Voraussetzungen:

$$\underline{P}_{G \max} = \frac{\underline{I}_G^2}{4} \frac{1}{G_G} \quad (43)$$

Zur Berechnung von $\underline{P}_L = \frac{\underline{I}_L^2}{G_L}$ (44)

werden die Gleichungen (4), (5) und Bild 22 herangezogen:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_G - \underline{U}_1 \underline{Y}_G \rightarrow \text{in (4) sowie } \underline{U}_2 = -\frac{\underline{I}_2}{\underline{Y}_L} \rightarrow \text{in (4) und (5):}$$

$$(4): \underline{I}_G = (\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_G) \underline{U}_1 - \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_L} \underline{I}_2$$

$$(5): \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 - \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_L} \underline{I}_2 \rightarrow \underline{U}_1 = \frac{1 + \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_L}}{\underline{Y}_{21}} \underline{I}_2 \rightarrow (4)$$

$$\underline{I}_G = \left[\frac{(\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_G) \left(1 + \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_L} \right)}{\underline{Y}_{21}} - \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_L} \right] \underline{I}_2 \rightarrow \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_G} = \frac{\underline{Y}_{21} \underline{Y}_L}{(\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_G)(\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_L) - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21}}$$

1. Vierpole und Mehrpole

Nach Bild 22 mit $\underline{I}_L = \frac{\underline{G}_L}{\underline{Y}_L} \underline{I}_2$ wird:

$$\frac{\underline{I}_L}{\underline{I}_G} = \frac{\underline{Y}_{21} \underline{G}_L}{(\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_G)(\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_L) - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21}} \quad (45)$$

Somit erhält man unter Verwendung von (44) und (42)

$$\underline{P}_L = \frac{\underline{Y}_{21}^2 \underline{G}_L}{\left[(\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_G)(\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_L) - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21} \right]^2} \underline{I}_G^2 \quad (46)$$

$$\underline{H}_B = \sqrt{\frac{\underline{P}_L}{\underline{P}_{G \max}}} = 2 \frac{\underline{I}_L}{\underline{I}_G} \sqrt{\frac{\underline{G}_G}{\underline{G}_L}} \quad (46a)$$

und damit den Betriebsübertragungsfaktor, berechnet mit Y-Parametern:

$$\underline{H}_B = \frac{2 \underline{Y}_{21} \sqrt{\underline{G}_G \underline{G}_L}}{(\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_G)(\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_L) - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21}} \quad (47)$$

Natürlich lässt sich der Betriebsübertragungsfaktor mit anderen Vierpolparametern auf ähnliche Weise berechnen, Grundlage dafür sind die entsprechenden Gleichungssysteme.

Der Betrag des Betriebsübertragungsfaktors ist verantwortlich für eine Änderung der Amplitude des übertragenen Signals. Der Phasenwinkel bewirkt eine Änderung der Phase dieses Signals. Das kann in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\underline{H}_B = e^{-\underline{g}_B} \quad (48)$$

mit $\underline{g}_B = a_B + jb_B = -\ln \underline{H}_B = \ln \underline{D}_B$ (49)

\underline{g}_B - komplexes Betriebsdämpfungsmaß

a_B - Betriebsdämpfung

b_B - Betriebsphase

$$a_B = -\ln |\underline{H}_B| = \ln |\underline{D}_B| \text{ in Neper (Np)} \quad (50)$$

Die Angabe in Gleichung (50) ist veraltet. Heute ist das logarithmische Maß bezogen auf die Basis 10 gebräuchlich:

$$a_B = -20 \lg |\underline{H}_B| = 20 \lg |\underline{D}_B| \text{ in deziBel (dB)} \quad (51)$$

Es gilt: $1 \text{ dB} = 0,1151 \text{ Np}$ und $1 \text{ Np} = 8,686 \text{ dB}$ (52)

$$\text{Schließlich: } b_B = -\arg(\underline{H}_B) = \arg(\underline{D}_B) \quad (53)$$

Die Übertragungseigenschaften eines Vierpols (Zweitores) sind normalerweise frequenzabhängig. Aus diesem Grund kommt den Funktionen $a_B(\omega)$ und $b_B(\omega)$ große Bedeutung bei der Beurteilung der Veränderung der Signaleigenschaften während der Übertragung über ein System zu.

Damit ein Signal unverzerrt das Zweitor passiert, sollten alle Frequenzanteile dieses Signals um den gleichen Betrag gedämpft (oder verstärkt) und zeitverzögert werden. Daraus folgt für die Betriebsdämpfung:

$$a_B(\omega) = \text{const.} \quad (54)$$

Zur Beschreibung der Zeitverzögerung in Abhängigkeit von der Frequenz hat man eine neue Größe definiert, die sog. Gruppenlaufzeit:

$$\tau_G(\omega) = -\frac{db_B(\omega)}{d\omega} \quad (55)$$

Sie stellt also den negativen Anstieg der Betriebsphase als Funktion der Frequenz dar und sollte ebenfalls zur Vermeidung von Verzerrungen des übertragenen Signals eine Konstante darstellen:

$$\tau_G(\omega) = \text{const.} \quad (56)$$

Daraus folgt, die Betriebsphase $b_B(\omega)$ muss in diesem Falle eine lineare Abhängigkeit von der Frequenz aufweisen.

Beispiel: Es soll ein Signal mit einer idealen Rechteckschwingung als Zeitfunktion übertragen werden:

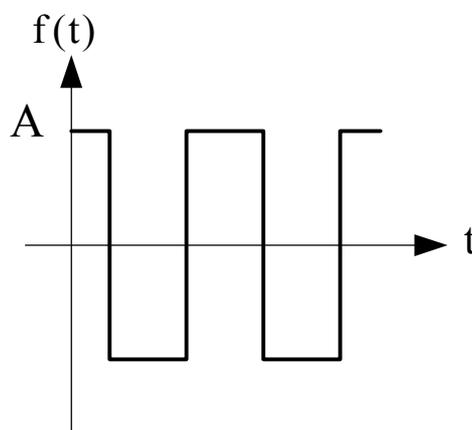


Bild 24: Ideale Rechteckschwingung

1. Vierpole und Mehrpole

Mit Hilfe einer Fourier-Reihen-Entwicklung lässt sich diese Schwingung als unendliche Summe von Cosinus-Funktionen mit ungeradzahligem Vielfachen der Grundfrequenz angeben:

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \cos(\omega t) - \frac{4A}{3\pi} \cos(3\omega t) + \frac{4A}{5\pi} \cos(5\omega t) - \frac{4A}{7\pi} \cos(7\omega t) + \dots$$

Damit würde sich bei Beschränkung auf 8 Oberschwingungen die Darstellung im Bild 25 ergeben:

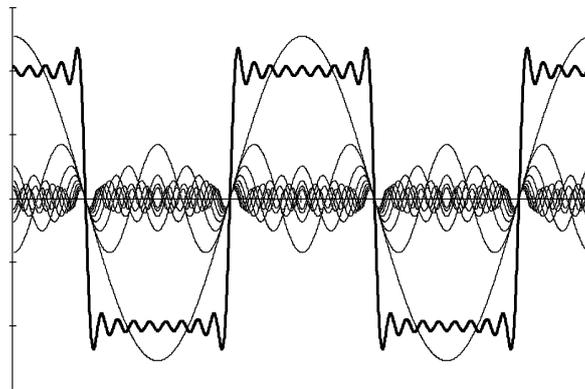


Bild 25:

Es resultiert natürlich aufgrund der Überlagerung einer endlichen Anzahl von Oberschwingungen kein idealer Rechteckimpuls, aber es ist zu erkennen, dass die verwendeten Funktionen sich sowohl amplituden- als auch phasenrichtig zusammensetzen.

Als nächsten Schritt werden die einzelnen Schwingungen mit unterschiedlichen Zeitverzögerungen beaufschlagt:

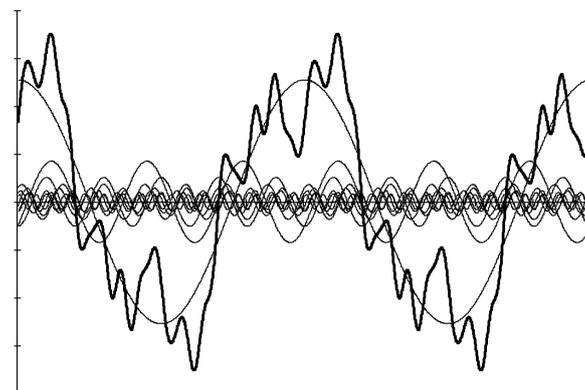


Bild 26: $\tau_G(\omega) \neq \text{const.}$

Es ist zu erkennen, dass die resultierende Funktion keine Ähnlichkeit mehr mit einer Rechteckschwingung aufweist. Das Gleiche gilt für unterschiedliche Amplitudendämpfungen:

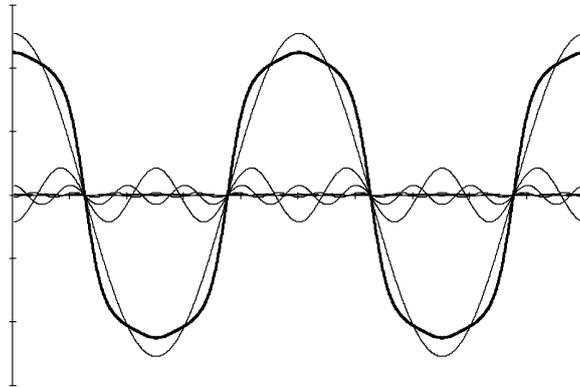


Bild 27: $a_B(\omega) \neq \text{const.}$

Die Verzerrungen von Signalen durch ein frequenzmäßig nicht konstantes Dämpfungsmaß bzw. nicht konstante Gruppenlaufzeit nennt man auch „lineare Verzerrungen“, da diese durch Vierpole, welche aus linearen Bauelementen (R,L und C) aufgebaut sind, verursacht werden. „Linear“ bedeutet, dass die Werte dieser Elemente nicht von den Beträgen von Strom und Spannung abhängig sind (siehe 1.1 Vierpolgleichungen). Damit sind auch die Übertragungseigenschaften unabhängig von Strom-, Spannungs- und Leistungspegeln. Im Gegensatz zu den „nichtlinearen Verzerrungen“ entstehen hier keine neuen Frequenzanteile im Signal und die Auswirkungen können durch Vierpole mit entgegen gesetztem Verhalten korrigiert werden (sog. „Korrekturnetzwerke“).