Heinrich Nuszkowski

Aufgabensammlung Digitale Signalübertragung im Mobilfunk

Informationstechnik

Heinrich Nuszkowski

Aufgabensammlung
Digitale Signalübertragung im Mobilfunk

VOGT

Dresden 2019

Autor
Dr.-Ing. habil. Heinrich Nuszkowski
TU Dresden
Vodafone Stiftungslehrstuhl Mobile Nachrichtensysteme

Herausgeber
Prof. Dr.-Ing. Jörg Vogt
HTW Dresden
Fakultät Informatik / Mathematik
01069 Dresden

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

© Jörg Vogt Verlag 2019
Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Gesetzt vom Autor

ISBN 978-3-95947-032-2

Jörg Vogt Verlag
Niederwaldstr. 36
01277 Dresden
Germany

Phone: +49-(0)351-31403921
Telefax: +49-(0)351-31403918
e-mail: info@vogtverlag.de
Internet : www.vogtverlag.de

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung ist eine Ergänzung zu dem Buch *Digitale Signalübertragung im Mobilfunk*, das ebenfalls im Jörg Vogt Verlag erschienen ist. Die Besonderheit des Mobilfunkkanals besteht darin, dass Dopplereffekt und Mehrwegeausbreitung die Übertragungsfunktion zeit- und frequenzvariant machen. Eine zuverlässige Übertragung über solch einen Kanal erfordert besondere Techniken, die in den modernen Mobilfunksystemen angewendet werden. Anliegen der Aufgabensammlung ist es, Wirkungsprinzip und Leistungsfähigkeit dieser Techniken anhand von Beispielen verständlich zu machen. Die Aufgabensammlung basiert auf Übungsaufgaben zur Vorlesung *Mobile Nachrichtensysteme I*, die der Autor an der Technischen Universität Dresden seit vielen Jahren hält. Die Aufgabensammlung wendet sich daher in erster Linie an Studenten der Fachrichtung Nachrichtentechnik. In den Aufgabenstellungen wird auf die entsprechenden Kapitel des oben zitierten Buches verwiesen, in denen der benötigte theoretische Zusammenhang behandelt wird. In einem mathematischen Anhang werden ebenfalls Erläuterungen und Hinweise zur Lösung der Aufgaben gegeben. Die Mehrzahl der Aufgaben erfordert keine Unterstützung durch programmierbare Rechner oder Rechenprogramme wie MATLAB. Nur für einige wenige rechenintensive Teilaufgaben ist eine Computeranwendung notwendig. Die Aufgabensammlung enthält 32 Aufgaben und ausführliche Lösungen zu den Themenkomplexen

- Transformation von Wahrscheinlichkeitsdichten,
- Mehrwegeausbreitung, Doppler, Bello-Funktionen,
- MLSE-Empfänger (Ungerboeck- und Forney-Empfänger),
- Zero-Forcing- und MMSE-Entzerrung,
- OFDM und Rake-Empfänger,
- Raumdiversität (Antennendiversität),
- Kanalschätzung.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Jörg Vogt möchte ich an dieser Stelle ganz herzlich danken für die wertvolle Unterstützung bei der Erstellung des Manuskriptes. Mein besonderer Dank gilt auch Herrn Prof. Jens Schönthier und Frau Dipl.-Ing. Sandra Bender für die kritische Durchsicht des Manuskriptes.

Auf Reaktionen aus der verehrten Leserschaft freue ich mich und greife gerne Vorschläge und Hinweise auf.

Dresden, im Mai 2019 Heinrich Nuszkowski

Inhaltsverzeichnis

Vorwort v

1 Wahrscheinlichkeitsdichte-Transformation 1
1.1 Aufgaben . . . 1
1.1.1 Wahrscheinlichkeitsdichte $p_y(y),\ \boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x})$ . . . 1
1.1.2 Wahrscheinlichkeitsdichte $p_z(z),\ \boldsymbol{z} = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ . . . 3
1.1.3 Komplexer Gauß-Prozess $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{x}(t) + \mathrm{j}\,\boldsymbol{y}(t)$ . . . 6
1.2 Lösungen . . . 8
1.2.1 Wahrscheinlichkeitsdichte $p_y(y),\ \boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x})$ . . . 8
1.2.2 Wahrscheinlichkeitsdichte $p_z(z)$ für $\boldsymbol{z} = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ . . . 9
1.2.3 Komplexer Gauß-Prozess $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{x}(t) + \mathrm{j}\,\boldsymbol{y}(t)$ . . . 12

2 Mehrwegeausbreitung und Doppler-Effekt 15
2.1 Aufgaben . . . 15
2.1.1 Mehrwegeausbreitung und Doppler . . . 15
2.1.2 Bello-Systemfunktionen . . . 16
2.1.3 Bello-Korrelationsfunktionen . . . 17
2.1.4 Mehrwegeausbreitungsprofile nach COST 207 . . . 19
2.1.5 Rayleigh-Empfangsbedingung, sektorisierte Antenne . . . 21
2.2 Lösungen . . . 22
2.2.1 Mehrwegeausbreitung und Doppler . . . 22
2.2.2 Bello-Systemfunktionen . . . 23
2.2.3 Bello-Korrelationsfunktionen . . . 27
2.2.4 Mehrwegeausbreitungsprofile nach COST 207 . . . 32
2.2.5 Rayleigh-Empfangsbedingung, sektorisierte Antenne . . . 35

3 Rayleighkanal 39
3.1 Aufgaben . . . 39
3.1.1 Rayleigh-Kanal (I) . . . 39
3.1.2 Rayleigh-Kanal (II) . . . 41
3.2 Lösungen . . . 42
3.2.1 Rayleigh-Kanal (I) . . . 42
3.2.2 Rayleigh-Kanal (II) . . . 44

4 MLSE-Empfänger **47**
4.1 Aufgaben . . . 47
4.1.1 Ungerboeck-Empfänger für Gauß-Impulse . . . 47
4.1.2 Gauß-Impulse, Bitfehlerwahrscheinlichkeit . . . 50
4.1.3 Ungerboeck-Empfänger für $\sqrt{\cos(\pi fT)}$-Impulse (I) . . . 52
4.1.4 Ungerboeck-Empfänger für $\sqrt{\cos(\pi fT)}$-Impulse (II) . . . 53
4.1.5 Ungerboeck-Empfänger für QPSK-Signale und ISI (I) . . . 55
4.1.6 Ungerboeck-Empfänger für QPSK-Signale und ISI (II) . . . 57
4.1.7 Forney-Empfänger für duobinärcodierte Impulsfolge . . . 60
4.1.8 Forney-Empfänger für BPSK-Signale und ISI . . . 63
4.2 Lösungen . . . 64
4.2.1 Ungerboeck-Empfänger für Gauß-Impulse . . . 64
4.2.2 Gauß-Impulse, Bitfehlerwahrscheinlichkeit . . . 69
4.2.3 Ungerboeck-Empfänger für $\sqrt{\cos(\pi fT)}$-Impulse (I) . . . 73
4.2.4 Ungerboeck-Empfänger für $\sqrt{\cos(\pi fT)}$-Impulse (II) . . . 76
4.2.5 Ungerboeck-Empfänger für QPSK-Signale und ISI (I) . . . 78
4.2.6 Ungerboeck-Empfänger für QPSK-Signale und ISI (II) . . . 82
4.2.7 Forney-Empfänger für duobinärcodierte Impulsfolge . . . 85
4.2.8 Forney-Empfänger für BPSK-Signale und ISI . . . 90

5 Zero-Forcing- und MMSE-Entzerrung **95**
5.1 Aufgaben . . . 95
5.1.1 Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei ISI . . . 95
5.1.2 Zero-Forcing-Entzerrung (I) . . . 96
5.1.3 Zero-Forcing-Entzerrung (II) . . . 98
5.1.4 Zero-Forcing- und MMSE-Entzerrung . . . 98
5.1.5 Entzerrung im Frequenzbereich . . . 101
5.2 Lösungen . . . 102
5.2.1 Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei ISI . . . 102
5.2.2 Zero-Forcing-Entzerrung (I) . . . 106
5.2.3 Zero-Forcing-Entzerrung (II) . . . 109
5.2.4 Zero-Forcing- und MMSE-Entzerrung . . . 111
5.2.5 Entzerrung im Frequenzbereich . . . 116

6 OFDM und Rake-Empfänger **119**
6.1 Aufgaben . . . 119
6.1.1 OFDM-Übertragungssystem (I) . . . 119
6.1.2 OFDM-Übertragungssystem (II) . . . 121
6.1.3 Rake-Empfänger . . . 124
6.1.4 OFDM oder Rake . . . 125
6.2 Lösungen . . . 126
6.2.1 OFDM-Übertragungssystem (I) . . . 126
6.2.2 OFDM-Übertragungssystem (II) . . . 129

6.2.3 Rake-Empfänger 130
6.2.4 OFDM oder Rake 133

7 Raumdiversität **135**
7.1 Aufgaben 135
7.1.1 Closed Loop Transmit Diversity 135
7.1.2 Space Time Transmit Diversity 136
7.2 Lösungen 139
7.2.1 Closed Loop Transmit Diversity 139
7.2.2 Space Time Transmit Diversity 141

8 Kanalschätzung **145**
8.1 Aufgaben 145
8.1.1 Kanalschätzung mit Trainingssequenz 145
8.1.2 Kanalschätzung mit Pilotsignal im Zeitbereich 147
8.1.3 Kanalschätzung mit Pilotsignal im Frequenzbereich 148
8.2 Lösungen 152
8.2.1 Kanalschätzung mit Trainingssequenz 152
8.2.2 Kanalschätzung mit Pilotsignal im Zeitbereich 153
8.2.3 Kanalschätzung mit Pilotsignal im Frequenzbereich 155

A Mathematischer Anhang **157**
A.1 Leistungsspektrum $\Phi_{xx}(f)$ des komplexen Gauß-Prozesses 157
A.2 Leistungsspektrum $\Phi_{\dot{x}\dot{x}}(f)$ des komplexen Gauß-Prozesses 158
A.3 Pegelüberschreitungsrate $n(r_0)$ 159
A.4 Mittlere Fadingdauer $\bar{t}_F$ 160
A.5 Zusammenhang zwischen $\phi_{h_S h_S}(\tau)$ und $h(t)$ 161
A.6 ZF-Entzerrung mit MSE-Kriterium 161
A.7 Entzerrung mit MMSE-Kriterium 163
A.8 Orthogonalitätseigenschaft der Spaltfunktion 166
A.9 Entzerrung im Frequenzbereich 166
A.10 Signalvektoren bei linearer Modulation 169
A.11 Signalvektor am Rayleigh-Kanalausgang 170
A.12 Mittelwert der Vektornormen 170

B Abkürzungen **173**

Literaturverzeichnis **175**

Kapitel 1

Wahrscheinlichkeitsdichte-Transformation

Aufgaben

Die Nachrichtentechnik beschäftigt sich mit der Übertragung von Information unter der Einwirkung unterschiedlicher Störeinflüsse. Die dabei zu betrachtenden physikalischen Größen sind meist Zufallssignale, die durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte charakterisiert sind. Bei der mathematischen Modellierung der Übertragung werden diese physikalischen Größen unterschiedlichen Operationen unterworfen, wodurch die Frage nach der Transformation von Wahrscheinlichkeitsdichten entsteht. Dabei sollen zwei wichtige Fälle betrachtet werden:

(1) Zwischen der neuen Zufallsgröße $\boldsymbol{y}$ und der alten Zufallsgröße $\boldsymbol{x}$ besteht der Zusammenhang $\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x})$.

(2) Die neue Zufallsgröße $\boldsymbol{z}$ ist eine Funktion von zwei unabhängigen Zufallsgrößen $\boldsymbol{z} = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Anmerkung:
Der Einfachheit halber wird nachfolgend häufig die Bezeichnung Dichte statt Wahrscheinlichkeitsdichte verwendet.

Wahrscheinlichkeitsdichte $p_y(y),\ \boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x})$

Besteht der Zusammenhang $\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x})$ zwischen den Zufallsvariablen $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{x}$, dann lässt sich die Dichte $p_y(y)$ mit

$$p_y(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_x(x_i)}{|g'(x_i)|} \tag{1.1.1}$$

aus der Dichte $p_x(x)$ berechnen ([1], Chapter 5.1 Functions of one random variable). In dieser Gleichung bezeichnen $x_i,\ i = 1, \ldots, n$ die Lösungen für einen gegebenen Wert y

$$y = g(x_1) = \ldots = g(x_n)$$

(siehe Bild 1.1) und $g'(x_i)$ die Ableitungen von $g(x)$ in den Punkten $x_i,\ i = 1, \ldots, n$.

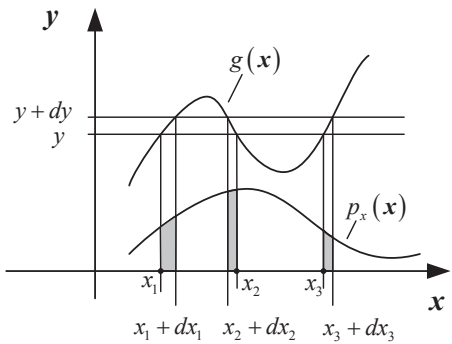

Bild 1.1: Veranschaulichung der Gleichungen (1.1.2) bis (1.1.6)

Nachfolgend werden die Überlegungen dargestellt, die zur Ableitung von Gleichung (1.1.1) führen. Diese Ableitung ist hilfreich, um die Gleichung zu verstehen und anzuwenden.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass $\boldsymbol{y}$ in dem Intervall $y < \boldsymbol{y} \leq y + dy$ liegt

$$\text{Prob}(y < \boldsymbol{y} \leq y + dy) = p_y(y)dy, \tag{1.1.2}$$

kann aus Bild 1.1 folgende Beziehung abgelesen werden

$$\begin{aligned}\text{Prob}(y < \boldsymbol{y} \leq y + dy) &= \text{Prob}(x_1 < \boldsymbol{x} \leq x_1 + dx_1) \\ &+ \text{Prob}(x_2 < \boldsymbol{x} \leq x_2 + dx_2) + \text{Prob}(x_3 < \boldsymbol{x} \leq x_3 + dx_3),\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

wobei die rechte Seite der Gleichung (1.1.3) den schattierten Flächen in Bild 1.1 entspricht. Die Wahrscheinlichkeiten, die durch diese schattierten Fächen veranschaulicht werden, berechnen sich mit

$$\text{Prob}(x_1 < \boldsymbol{x} \leq x_1 + dx_1) = p_x(x_1)dx_1, \tag{1.1.4}$$

$$\text{Prob}(x_2 < \boldsymbol{x} \leq x_2 + dx_2) = p_x(x_2)dx_2, \tag{1.1.5}$$

$$\text{Prob}(x_3 < \boldsymbol{x} \leq x_3 + dx_3) = p_x(x_3)dx_3. \tag{1.1.6}$$

Für den Anstieg der Kurve $g(x)$ in den Punkten x_i, $i = 1, \ldots, 3$ gilt

$$g'(x_i) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_i} = \frac{dy}{dx_i},$$

Berücksichtigt man, dass der Anstieg $g'(x)$ sowohl positiv als auch negativ sein kann, dann folgt für betragsmäßig positive Werte von dx_i und dy der Zusammenhang

$$dx_i = \frac{dy}{|g'(x_i)|}, \qquad i = 1, \ldots, 3. \tag{1.1.7}$$

Einsetzen von (1.1.4) bis (1.1.7) in (1.1.3) und (1.1.2) liefert

$$p_y(y)dy = \frac{p_x(x_1)}{|g'(x_1)|}dy + \frac{p_x(x_2)}{|g'(x_2)|}dy + \frac{p_x(x_3)}{|g'(x_3)|}dy$$

bzw.

$$p_y(y) = \frac{p_x(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{p_x(x_2)}{|g'(x_2)|} + \frac{p_x(x_3)}{|g'(x_3)|}. \tag{1.1.8}$$

Für $x_i, i = 1, \ldots, n$ erhält man die Transformationsbeziehung (1.1.1).

Aufgabe:
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_y(y)$ für folgende Fälle:

a) $\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{x} + b, \qquad p_x(x) = 1/x_0, \quad 0 \le \boldsymbol{x} \le x_0$,

b) $\boldsymbol{y} = c\boldsymbol{x}, \qquad p_x(x) = \mathcal{N}(0, \sigma) = 1/(\sqrt{2\pi\sigma^2})\, \exp(x^2/(2\sigma^2))$,

c) $\boldsymbol{y} = c\cos(\boldsymbol{x}), \qquad p_x(x) = 1/(2\pi), \quad 0 \le \boldsymbol{x} \le 2\pi$.

Wahrscheinlichkeitsdichte $p_z(z)$, $\boldsymbol{z} = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

Besteht der Zusammenhang $\boldsymbol{z} = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ und die Verbunddichte $p_{xy}(x, y)$ ist bekannt, dann lassen sich Verteilungsfunktion $F_z(z)$ und Dichte $p_z(z)$ der Variablen $\boldsymbol{z}$ mit folgenden Ansätzen berechnen ([1], Chapter 6-2, One function of two random variables)

$$F_z(z) = \text{Prob}\{\boldsymbol{z} \le z\} = \text{Prob}\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in D_z\} = \int\int_{D_z} p_{xy}(x, y)\, dxdy, \tag{1.1.9}$$

$$\begin{aligned} p_z(z)dz &= \text{Prob}\{z < \boldsymbol{z} \le z + dz\} = \text{Prob}\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \Delta D_z\} \\ &= \int\int_{\Delta D_z} p_{xy}(x, y)\, dxdy. \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

In diesen Gleichungen bezeichnen D_z die Gesamtheit der Punkte $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, für die die Bedingung $\boldsymbol{z} = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le z$ besteht

$$\{\boldsymbol{z} \le z\} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in D_z\}, \tag{1.1.11}$$

während ΔD_z die Gesamtheit der Punkte $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ bezeichnet, für die die Bedingung $z \leq \boldsymbol{z} \leq z + dz$ erfüllt ist

$$\{z < \boldsymbol{z} \leq z + dz\} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \Delta D_z\}. \tag{1.1.12}$$

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung von $p_z(z)$ existiert, wenn $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ die Komponenten eines zweidimensionalen Zufallsvektors sind und die Verbunddichte $p_{xy}(x, y)$ bekannt ist. Man berechnet dann zunächst die Verbunddichte $p_{z\varphi}(z, \varphi)$ der Zufallsvariablen

$$\boldsymbol{z} = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \qquad \varphi = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{1.1.13}$$

aus der sich als dann als Randverteilung die gesuchte Dichte $p_z(z)$ gewinnen lässt

$$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{z\varphi}(z, \varphi)\, d\varphi. \tag{1.1.14}$$

Die Verbunddichte $p_{z\varphi}(z, \varphi)$ berechnet sich durch Verallgemeinerung der Transformationsgleichung (1.1.1) auf zwei Variablen mit [1],

$$p_{z\varphi}(z, \varphi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_{xy}(x_i, y_i)}{|\mathrm{J}(x_i, y_i)|}, \tag{1.1.15}$$

wobei $\mathrm{J}(x, y)$ die sogenannte Jacobi-Determinante bezeichnet

$$\mathrm{J}(x, y) = \begin{vmatrix} \partial z/\partial x & \partial z/\partial y \\ \partial \varphi/\partial x & \partial \varphi/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial z & \partial x/\partial \varphi \\ \partial y/\partial z & \partial y/\partial \varphi \end{vmatrix}^{-1}. \tag{1.1.16}$$

Aufgabe:
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten für die nachfolgend gegebenen Zufallsvariablen. Die Zufallsvariablen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ werden immer als voneinander unabhängig angenommen, sodass

$$p_{xy}(x, y) = p_x(x) p_y(y) \tag{1.1.17}$$

gilt.

a) $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$

Lösungshinweis:
Benutzen Sie Gleichung (1.1.10) und (1.1.17). Das Gebiet ΔD_z ist der in Bild 1.2 dargestellte Streifen mit der Breite $dx = dz$. Beachten Sie weiterhin, dass für einen gegebenen Wert z die Variable x durch den Wert $z - y$ ersetzt werden kann.

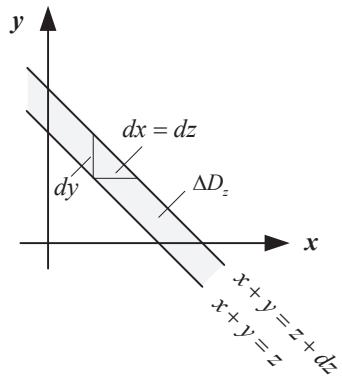

Bild 1.2: Veranschaulichung des Gebietes ΔD_z

b) $\boldsymbol{z} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}, \quad p_x = p_y = \mathcal{N}(0, \sigma), \quad p_{xy}(x, y) = p_x(x) p_y(y)$

Lösungshinweis:
Benutzen Sie zunächst Gleichung (1.1.10) und beachten Sie, dass die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $p_{xy}(x, y) = p_x(x) p_y(y)$ eine Kreissymmetrie besitzt und daher in dem Integrationsgebiet ΔD_z (siehe Bild 1.3) konstant ist. Bestätigen Sie dann das erzielte Ergebnis mit Hilfe der Gleichungen (1.1.13) bis (1.1.16). Verwenden Sie für die Berechnung der Verbunddichte $p_{z\varphi}(z, \varphi)$ die Beziehung $\varphi = \arctan(\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x})$. Die Variablen $\boldsymbol{z}$ und φ sind dann Polarkoordinaten.

c) $\boldsymbol{z} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}, \quad p_x = p_y = \mathcal{N}(m, \sigma),\ m \neq 0, \quad p_{xy}(x, y) = p_x(x) p_y(y)$

Lösungshinweis:
Vorgehensweise wie unter Aufgabe b) und benutzen Sie das nachfolgende bestimmte Integral

$$\int_0^{2\pi} \exp\big(p(\cos x + \sin x)\big)\, dx = 2\pi \mathrm{I}_0(\sqrt{2}\, p), \tag{1.1.18}$$

wobei $\mathrm{I}_0(\cdot)$ die modifizierte Bessel-Funktion 0-ter Ordnung bezeichnet.

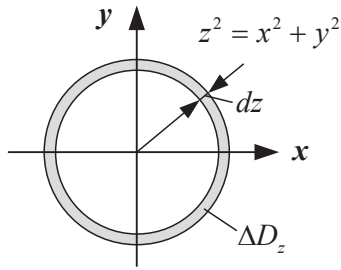

Bild 1.3: Veranschaulichung des Gebietes ΔD_z

Komplexer Gauß-Prozess $\boldsymbol{z(t) = x(t) + \mathrm{j}\, y(t)}$

Der komplexe Gauß-Prozess $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{x}(t) + \mathrm{j}\, \boldsymbol{y}(t)$ findet für die mathematische Modellierung des Mobilfunkkanals Verwendung. Daher sollen einige Eigenschaften dieses Gauß-Prozesses näher untersucht werden. Dabei werden für $\boldsymbol{x}(t)$ und $\boldsymbol{y}(t)$ folgende Annahmen getroffen:

- gleiche statistische Eigenschaften,
- stationär im weiteren Sinn

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{x}(t)] = \mathrm{E}[\boldsymbol{y}(t)] = 0, \tag{1.1.19}$$

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}(t+\tau)] = \mathrm{E}[\boldsymbol{y}(t)\boldsymbol{y}(t+\tau)] = \phi_{xx}(\tau) = \phi_{yy}(\tau) = \phi(\tau), \tag{1.1.20}$$

- normalverteilt (gaußverteilt) und unabhängig voneinander

$$p_x(x) = p_y(y) = \mathcal{N}(0, \sigma), \tag{1.1.21}$$

$$p_{xy}(x, y) = p_x(x)p_y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\Big(\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\Big). \tag{1.1.22}$$

Beschreibt man den komplexen Gauß-Prozess in Polarkoordiaten, dann gilt

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{x}(t) + \mathrm{j}\, \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{r}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\, \varphi(t)} \tag{1.1.23}$$

mit den Beziehungen

$$\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{\boldsymbol{x}^2(t) + \boldsymbol{y}^2(t)}, \tag{1.1.24}$$

$$\varphi(t) = \arctan(\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x}). \tag{1.1.25}$$

Die Dichten $p_{r,\varphi}(r,\varphi)$, $p_r(r)$ und $p_\varphi(\varphi)$ lassen sich aus den Ergebnissen (1.2.42), (1.2.43) und (1.2.44) von Aufgabe 1.1.2 c) übernehmen:

$$p_{r\varphi}(r,\varphi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-r^2/(2\sigma^2)}, \quad r \geq 0, \tag{1.1.26}$$

$$p_r(r) = \frac{r}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-r^2/(2\sigma^2)}, \quad r \geq 0, \tag{1.1.27}$$

$$p_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \tag{1.1.28}$$

Aufgabe:
Für die Berechnung der Pegelüberschreitungsrate und der mittleren Fadingdauer in einem Rayleigh-Kanal wird die Verbunddichte $p(r,\dot{r})$ benötigt. Diese Verbunddichte soll nachfolgend in mehreren Schritten abgeleitet werden.

a) Welche Aussage lässt sich über die Dichtefunktion der Prozesse $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ und $\dot{\boldsymbol{y}}(t)$ treffen, wenn $\boldsymbol{x}(t)$ und $\boldsymbol{y}(t)$ Gaußsche Prozesse sind?

b) Welche Aussage folgt aus a) für die bedingte Dichte $p_{\dot{r}}(\dot{r}|\varphi)$? Zur Beantwortung dieser Frage können Sie (1.1.24) nach t ableiten und die Beziehungen

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r}.$$

benutzen.

c) Berechnen Sie die bedingten Mittelwerte $\mathrm{E}[\dot{\boldsymbol{r}}|\varphi]$ und $\mathrm{E}[\dot{\boldsymbol{r}}^2|\varphi]$!
Die Werte $\mathrm{E}[\dot{\boldsymbol{r}}|\varphi]$ und $\mathrm{E}[\dot{\boldsymbol{r}}^2|\varphi]$ werden zur Berechnung der Verbunddichte $p_{\dot{r}r}(\dot{r},r)$ gebraucht. Benutzen Sie für die Berechnung die Ergebnisse von a) und b), sowie den Zusammenhang

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \int_{-f_m}^{f_m} \Phi_{\dot{x}\dot{x}}(f_d)\,df_d = \frac{4\pi\sigma^2}{f_m}\int_{-f_m}^{f_m} \frac{f_d^2\,df_d}{\sqrt{1-(f_d/f_m)^2}}\,, \tag{1.1.29}$$

der in Anhang A.2 abgeleitet wird ((A.2.15)). In dieser Gleichung bezeichnen $\Phi_{\dot{x}\dot{x}}(f_d)$ das Leistungsspektrum des Prozesses $\dot{x}(t)$, f_d die Doppler-Frequenz und f_m die maximale Doppler-Frequenz. Für die Berechnung des Integrals gilt

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}. \tag{1.1.30}$$

([3], Kapitel III, Tabelle unbestimmter Integrale).

d) Welche Aussage folgt aus b) und c) für die Dichte $p_{\dot{r}}(\dot{r}|r)$?

e) Berechnen Sie die Dichte $p_{\dot{r}r}(\dot{r},r)$ unter Verwendung der Beziehung

$$p_{\dot{r}r}(\dot{r},r) = p_{\dot{r}}(\dot{r}|r)p_r(r) \tag{1.1.31}$$

sowie der Rayleigh-Dichte nach Gleichung (1.2.39) für $p_r(r)$, die in Aufgabe 1.1.2 b) abgeleitet wird.

Lösungen

Wahrscheinlichkeitsdichte $p_y(y),\ \boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x})$

a) $\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{x} + b$:
Die Gleichung $y = g(x) = ax + b$ hat eine Lösung $x = (y - b)/a$ für alle y. Mit $g'(x) = a$ folgt daraus mit (1.1.1)

$$p_y(y) = \frac{1}{a}\, p_x\big(\frac{y-b}{a}\big). \tag{1.2.32}$$

Für $p_x(x) = 1/x_0,\ 0 \le \boldsymbol{x} \le x_0$ erhält man die Lösung

$$p_y(y) = \frac{1}{ax_0}, \qquad b \le y \le ax_0 + b. \tag{1.2.33}$$

b) $\boldsymbol{y} = c\boldsymbol{x}$:
Die Gleichung $y = g(x) = cx$ hat eine Lösung $x = y/c$. Mit $g'(x) = c$ folgt daraus

$$p_y(y) = \frac{1}{|c|}\, p_x\big(\frac{y}{c}\big). \tag{1.2.34}$$

Für $p_x(x) = \mathcal{N}(0, \sigma)$ erhält man die Lösung

$$\begin{aligned} p_y(y) &= \frac{1}{|c|}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\big(\frac{(y/c)^2}{2\sigma^2}\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(c\sigma)^2}}\exp\big(\frac{y^2}{2(c\sigma)^2}\big) = \mathcal{N}(0, |c|\sigma). \end{aligned} \tag{1.2.35}$$

c) $\boldsymbol{y} = c\cos(\boldsymbol{x})$:
Für $|y| > 1$ besitzt die Gleichung $y = g(x) = c\cos(x)$ keine Lösung, und es gilt $p_y(y) = 0$. Für $|y| \le 1$ existieren in dem Bereich $0 \le x < 2\pi$ zwei Lösungen (siehe Bild 1.4)

$$x_i = \arccos\big(\frac{y}{c}\big), \quad i = 1, 2. \tag{1.2.36}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} g'(x) &= -c\sin(x) = -c\sqrt{1 - \cos^2(x)} \\ &= -c\sqrt{1 - (y/c)^2} = \sqrt{c^2 - y^2}. \end{aligned}$$

und man erhält allgemein

$$p_y(y) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - y^2}}\big(p_x(x_1) + p_x(x_2)\big), \quad |y| \le 1.$$

Für den Fall $p_x(x) = 1/(2\pi),\ 0 \le x < 2\pi$ ergibt sich dann

$$p_y(y) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - y^2}}\big(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\big) = \frac{1}{\pi c\sqrt{1 - (y/c)^2}}, \quad |y| \le 1. \tag{1.2.37}$$